

変分マルチスケール法を適用した時間有限要素法による時間積分特性の制御 Controlling time integration properties by time-discontinuous variational multiscale FEM

○大川琳久, シャルマ ビカス, 藤澤和謙
Riku Okawa, Vikas Sharma, Kazunori Fujisawa

1. はじめに

現在, 大地震に対する農業用ダム安全性評価が進められており, そのために災害時の挙動をシミュレートし, それを考慮した構造物の設計をしなければならない。大地震を想定した地震応答解析には, 安定で高精度な手法が要求される。著者らはこれまでに有限要素法を空間方向だけでなく時間方向にも適用した速度型 Space-Time 有限要素法 (v-ST/FEM) を研究してきた。同手法は, 速度のみを未知数とし無条件安定かつ3次精度以上の時間積分性能を有する。しかし, 時間積分特性を制御することはできず, 高周波成分の減衰効果を有していないことが課題であった。一方, 変位と速度の両方を未知数とする変位速度型 Space-Time 有限要素法 (uv-ST/FEM) では, 無条件安定かつ3次精度以上の時間積分性能を維持したまま, 高周波成分の減衰が可能になる。本稿では, 近似の際に線形近似だけでなく高次の近似項を導入し, 最終的に高次成分を取り除くことでより時間積分特性を制御できる変分マルチスケール変位速度型 Space-Time 有限要素法 (以下, VMS uv-ST/FEM と呼ぶ) を提案する。

2. VMS uv-ST/FEM

時間積分特性を評価するにあたり, 以下の1質点の運動方程式を考える。

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (\Leftrightarrow \dot{v} + \omega^2 u = 0, \dot{u} = v) \quad (1)$$

ここで, u, v, ω は変位, 速度, 角速度である。これまでの手法と異なる点は近似式にある。例えば従来の uv-ST/FEM では $v = v_n^+ T_1 + v_{n+1}^- T_2$ と近似する。ただし時間を t とし, $T_1(t), T_2(t)$ を線形一次要素の形状関数, 時刻 t_n と t_{n+1} での速度を v_n^+ と v_{n+1}^- とする。変位 u についても同様である。本稿では線形近似に加えて高次の形状関数による近似も考える。具体的には以下のようになる。

$$u = \bar{u} + \tilde{u}, \quad \bar{u} = \bar{u}_n^+ T_1 + \bar{u}_{n+1}^- T_2, \quad \tilde{u} = r T_u \quad (2a)$$

$$v = \bar{v} + \tilde{v}, \quad \bar{v} = \bar{v}_n^+ T_1 + \bar{v}_{n+1}^- T_2, \quad \tilde{v} = s T_v \quad (2b)$$

ここで, \bar{u}, \bar{v} は線形近似, r, s はそれぞれ変位, 速度の高周波成分を表す。また T_u, T_v には, ルジャンドル多項式を用いる。 $P_n(x) = 1/(2^n n!) d^n/(dx^n) [(x^2 - 1)^n]$ で表され, 本稿では計算上の都合により n が奇数かつ $T_u \neq T_v$ とする。弱形式は次のようになる。

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \delta \bar{u} (\dot{u} - v) dt = 0, \quad \int_{t_n}^{t_{n+1}} \delta \bar{v} (\dot{v} + \omega^2 u) dt = 0 \quad (3)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \delta \tilde{u} (\dot{u} - v) dt = 0, \quad \int_{t_n}^{t_{n+1}} \delta \tilde{v} (\dot{v} + \omega^2 u) dt = 0 \quad (4)$$

これらを計算して整理すると以下の式が得られる。

$$[m]\{\bar{u}\} + \begin{pmatrix} \bar{u}_n^+ - u_n^- \\ \bar{u}_{n+1}^- \end{pmatrix} - \frac{\Delta t}{2} [c]\{\bar{v}\} = 0, \quad [m]\{\bar{v}\} + \begin{pmatrix} \bar{v}_n^+ - v_n^- \\ \bar{v}_{n+1}^- \end{pmatrix} + \frac{\omega^2 \Delta t}{2} [c]\{\bar{u}\} = 0 \quad (5)$$

$$\bar{u}_n^+ + \bar{u}_n^+ - u_n^- = 0, \quad \bar{v}_n^+ + \bar{v}_n^+ - v_n^- = 0 \quad (6)$$

ただし, $[m], [c]$ は 2×2 の正方行列, $\{\bar{u}\} = \{\bar{u}_n^+ \bar{u}_{n+1}^-\}^T, \{\bar{v}\} = \{\bar{v}_n^+ \bar{v}_{n+1}^-\}^T$ とする。また $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ である。 u_n^-, v_n^- は, それぞれ t_n における既知の変位, 速度であるため u_0, v_0 とおく。

また高周波成分はそれぞれ $\tilde{u}_{n+1}^- = rT_u(t_{n+1}) = r, \tilde{v}_{n+1}^- = sT_v(t_{n+1}) = s, \tilde{u}_n^+ = rT_u(t_n) = -r, \tilde{v}_n^+ = sT_v(t_n) = -s$ となるため、以下のように表すことができる。

$$[m]\{\tilde{u}\} + \begin{pmatrix} \tilde{u}_n^+ - u_0 \\ r \end{pmatrix} - \frac{\Delta t}{2}[c]\{\tilde{v}\} = 0, \quad [m]\{\tilde{v}\} + \begin{pmatrix} \tilde{v}_n^+ - v_0 \\ s \end{pmatrix} + \frac{\omega^2 \Delta t}{2}[c]\{\tilde{u}\} = 0 \quad (7)$$

$$r = \tilde{u}_n^+ - u_0, \quad s = \tilde{v}_n^+ - v_0 \quad (8)$$

ここで(8)式をそれぞれ(7)式に代入し r, s を消去することで、高周波成分を取り除くことができる。また代入する際に係数 α ($0 \leq \alpha < 1$) を掛けて $r = \alpha(\tilde{u}_n^+ - u_0), s = \alpha(\tilde{v}_n^+ - v_0)$ として代入することで、高周波成分を取り除く量を変化させることができ、時間積分特性の制御が可能になる。式(7), (8)から $\tilde{u}_n^+, \tilde{v}_n^+$ を消去すると未知数 $\tilde{u}_{n+1}^-, \tilde{v}_{n+1}^-$ は以下の式で求められる。

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u}_{n+1}^- \\ \tilde{v}_{n+1}^- \Delta t \end{Bmatrix} = A(\Omega) \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \Delta t \end{Bmatrix} \quad (9)$$

ここで $A(\Omega)$ は増幅マトリックスと呼ばれ、図 2,3 に $A(\Omega)$ のスペクトル半径 ρ を $\Omega = \omega \Delta t$ の関数として示す。(スペクトル半径は Ω のみの関数で与えられ、 $A(\Omega)$ の固有値を λ_1, λ_2 としたとき、 $\rho(A) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$ と定義される。) 同図において $\alpha=0$ が uv-ST/FEM に対応するものである。高周波成分を取り除いているため、どの α においても減衰のタイミングが uv-ST/FEM より早くなっていることがわかる。また、 $0 \leq \alpha \leq 0.5$ の範囲では α が大きくなるにつれて減衰効果を発揮する周波数が全体的に小さくなる。一方、 $0.5 \leq \alpha < 1.0$ の範囲では α の値に関係なくスペクトル半径が変化し、均等に水平移動しない結果となった。

3. まとめ

変分マルチスケール法を時間方向の有限要素法に適用し、パラメータ α によって高周波成分の除去率を変えることでスペクトル半径の制御を可能にした。これは、有限要素法による時間積分に対して、積分特性を変化できる一般的な方法となる。

参考文献: 1) Sharma, V., Fujisawa, K. and Murakami, A.: Velocity-based time-discontinuous Galerkin space-time finite element method for elastodynamics, Soils and Foundations, Vol. 58, No. 2 pp. 491-510, 2018.

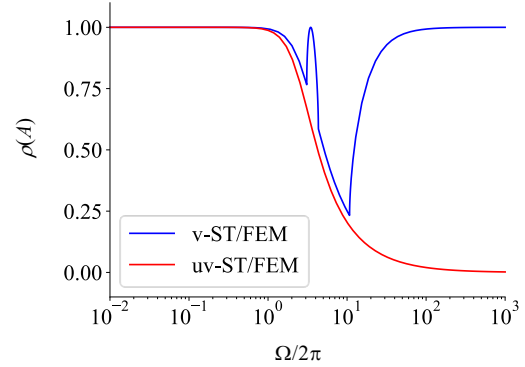


図 1 スペクトル半径

Fig.1 Spectral radius

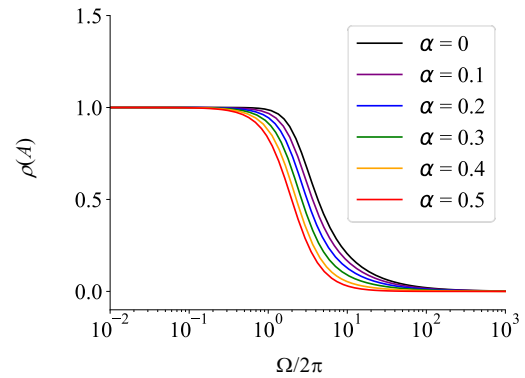


図 2 α によるスペクトル半径の変化

Fig.2 Spectral radius changed by α

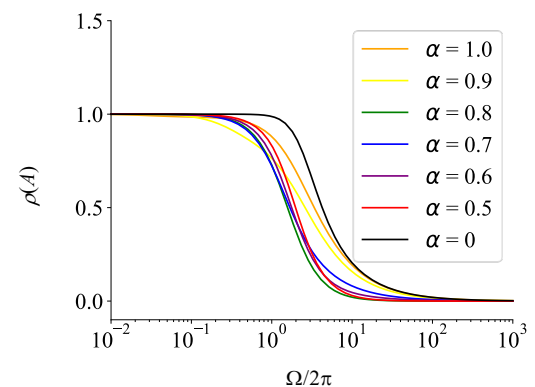


図 3 α によるスペクトル半径の変化

Fig.3 Spectral radius changed by α